

## E.6 Approximative Analyse von Nichtproduktformwarteschlangennetzen

---

- Nicht exponentiell verteilte Bedienzeiten
- Prioritäten (statische, dynamische)
- Unterschiedliche Bedienzeiten verschiedener Klassen bei Typ-1 Knoten
- Endliche Warteschlangen (Blockiernetze)
- Parallelverarbeitung, Synchronisation
- Fork-Join-Systeme
- WS-Netze mit heterogenen M/M/m- oder G/G/m-Knoten
- Simultane Betriebsmittelbelegung

# 1 Lösungsmöglichkeiten

---

- Approximation des Nichtproduktformwarteschlangennetz durch ein Produktformwarteschlangennetz
  
- Markovanalyse (aufwendig) → MOSEL
  
- Simulation (sehr aufwendig) → PEPSY
  
- Approximationsverfahren → PEPSY
  - ◆ Erweiterung der Produktformmethoden
  
  - ◆ Iterative Anwendung der Produktformmethoden

## 2 Geschlossene Nichtproduktformwarteschlangennetze

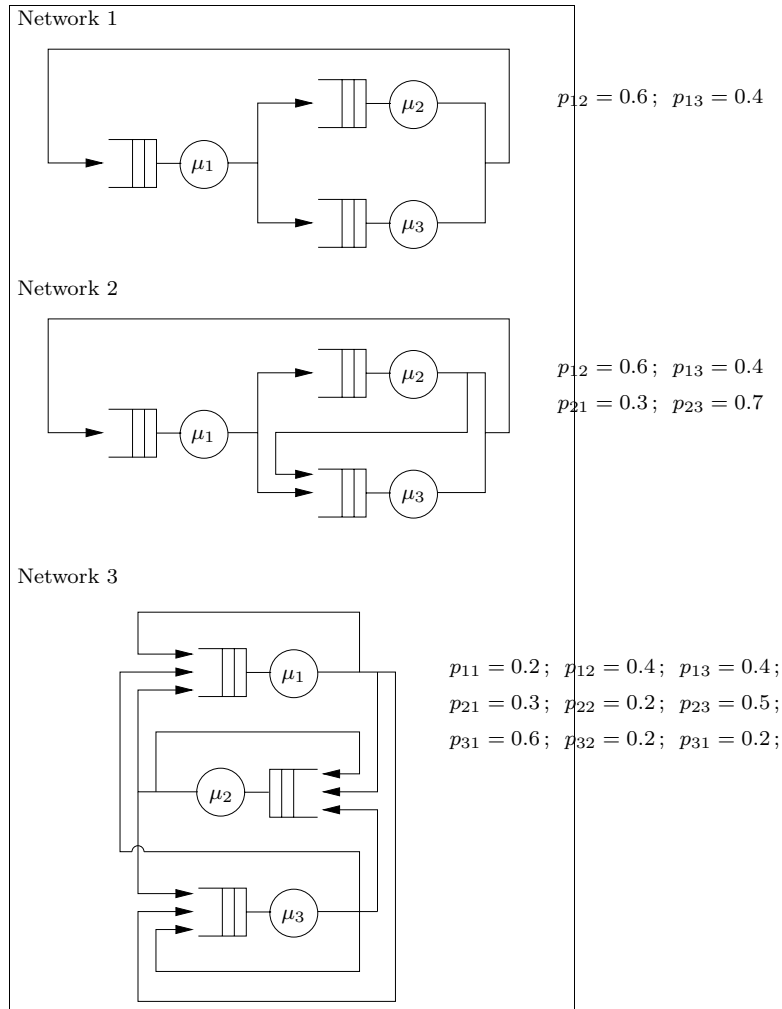
---

- Mindestens ein M/G/m-FCFS-Knoten (richtiger -/G/m-FCFS-Knoten)
  - ◆ Diffusionsapproximation
  - ◆ Maximum Entropie-Methode
  - ◆ Methode von Marie
  - ◆ Summationsmethode
  - ◆ Bottleneck Approximation
  - ◆ Robustness

## ■ Robustness:

- $-/G/1$ -FCFS- und  $-/G/m$ -FCFS-Knoten werden ersetzt durch  $M/M/1$ -FCFS- bzw.  $M/M/m$ -FCFS-Knoten
- Es kann gezeigt werden, dass der Einfluss der Variationskoeffizienten der Nichtproduktformknoten ( $-/G/1$  und  $-/G/m$ ) bei **geschlossenen** WS-Netzen gering ist (Nicht bei offenen!!).
- Diese Eigenschaft wird als "**Robustness**" bezeichnet.
- Die erzielte Genauigkeit durch Ausnutzung der Eigenschaft der Robustness ist für die meisten Anwendungsfälle ausreichend.

◆ Beispiel



► Variationskoeffizienten:

Combinations	Node 1 $c_{B_1}^2$	Node 2 $c_{B_2}^2$	Node 3 $c_{B_3}^2$
a	1.0	1.0	1.0
b	0.2	0.4	0.8
c	4.0	1.0	0.2
d	2.0	4.0	8.0

► Bedienraten:

	$\mu_1$	$\mu_2$	$\mu_3$
Balanced network	0.5	0.333	0.666
Network with bottleneck	0.5	1.0	2.0

► Durchsatz für "Balanced Network"

Squared Coefficient of Variations	Network 1		Network 2		Network 3	
	K = 5	K = 10	K = 5	K = 10	K = 5	K = 10
a	0.43	0.47	0.41	0.47	0.37	0.42
b	0.47	0.50	0.45	0.49	0.40	0.44
c	0.39	0.44	0.48	0.47	0.36	0.41
d	0.37	0.42	0.33	0.39	0.29	0.34

► Durchsatz für "Network with Bottleneck":

Squared Coefficient of Variations	Network 1		Network 2		Network 3	
	K = 5	K = 10	K = 5	K = 10	K = 5	K = 10
a	0.50	0.50	0.51	0.50	0.50	0.52
b	0.50	0.50	0.52	0.50	0.50	0.52
c	0.49	0.50	0.52	0.50	0.49	0.52
d	0.47	0.50	0.47	0.50	0.48	0.50

► Durchsatz in Abhängigkeit von der Anzahl der Aufträge im WS-Netz:

K	3	4	5	10	20	50
a	0.842	0.907	0.940	0.996	1.00	1.00
b	–	0.970	0.991	1.00	1.00	1.00
c	–	0.856	0.894	0.972	0.998	1.00
d	0.716	0.766	0.805	0.917	0.984	1.00



# 3 Offene Nichtproduktformwarteschlangennetze

---

## ■ Methoden:

- ◆ Diffusionsapproximation
  
- ◆ Maximum Entropie-Methode
  
- ◆ Dekompositionsmethoden
  - Pujolle
  - Whitt
  - Gelenbe
  - Chylla
  - Kühn

## ■ Dekompositionsmethoden

- Die Zwischenankunftszeiten und die Bedienzeiten sind **beliebig** verteilt und durch das erste und zweite Moment (bzw. Variationskoeffizient) gegeben.
- Die WS-Disziplin ist FCFS und die WS ist nicht begrenzt.
- Das WS-Netz kann mehrere Auftragsklassen besitzen (Klassenwechsel ist nicht erlaubt).
- Es sind auch "Multiple Server Knoten" (  $-/G/m$  ) erlaubt.

◆ Algorithmus (am Beispiel der Methode von Whitt):

- **Schritt 1:** Berechnung der Ankunftsraten und der Auslastung der einzelnen Knoten:

$$\lambda_i = \lambda_{0i} + \sum_{j=1}^N \lambda_j \cdot p_{ji}$$

$$\rho_i = \frac{\lambda_i}{m_i \cdot \mu_i}$$

- **Schritt 2:** Iterative Berechnung der Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten der einzelnen Knoten (siehe unten)

- **Schritt 3:** Berechnung der mittleren WS-Länge und der anderer Leistungsgrößen

- M/M/m-FCFS:

$$\bar{Q}_{iM/M/m} = \frac{\rho_i}{1 - \rho_i} \cdot P_{mi}$$

mit der Wartewahrscheinlichkeit  $P_{mi}$  ( $= \rho_i$  für M/M/1)

- Allen-Cunneen für G/G/m-FCFS:

$$\bar{Q}_{iAC} \approx \bar{Q}_{iM/M/m} \cdot \frac{(c_{Ai}^2 + c_{Bi}^2)}{2}$$

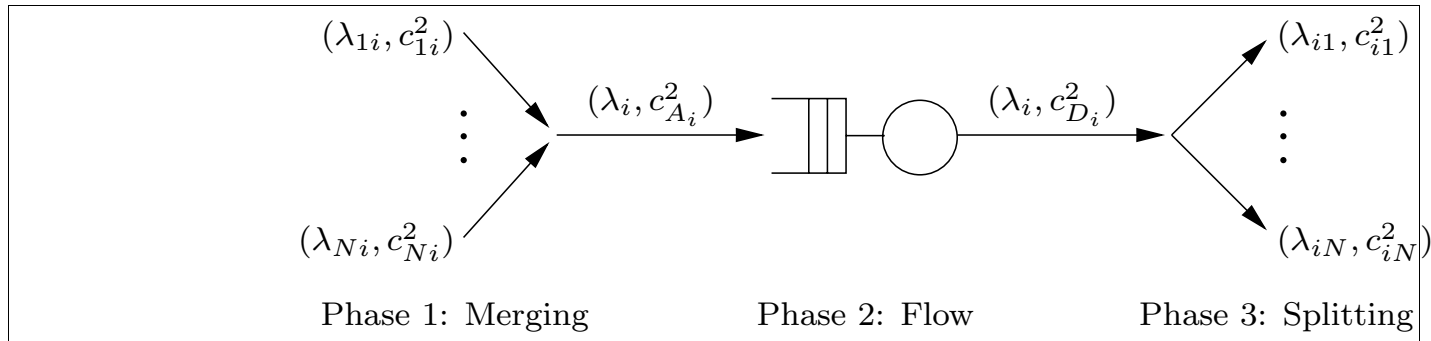
- Krämer/Langenbach-Belz für G/G/m-FCFS:

$$\bar{Q}_{i\text{KLB}} \approx \bar{Q}_{i\text{AC}} \cdot G_{\text{KLB}}$$

mit:

$$G_{\text{KLB}} = \begin{cases} e \left( -\frac{2}{3} \cdot \frac{(1 - \rho_i)}{P_{mi}} \cdot \frac{(1 - c_{Ai}^2)^2}{(c_{Ai}^2 + c_{Bi}^2)} \right), & c_{Ai}^2 \leq 1, \\ e - \left( (1 - \rho_i) \cdot \frac{(c_{Ai}^2 - 1)}{(c_{Ai}^2 + c_{Bi}^2)} \right), & c_{Ai}^2 > 1 \end{cases}$$

- zu **Schritt 2**: Iterative Berechnung der Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten bei den einzelnen Knoten (nach Whitt):



➤ Initialisierung:  $c_{ij} = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, N$

➤ Merging:  $i = 1, 2, \dots, N$

$$c_{Ai}^2 = \frac{1}{\lambda_i} \cdot \left( \sum_{j=1}^N c_{ji}^2 \cdot \lambda_j \cdot p_{ji} + c_{0i}^2 \cdot \lambda_0 \cdot p_{0i} \right)$$

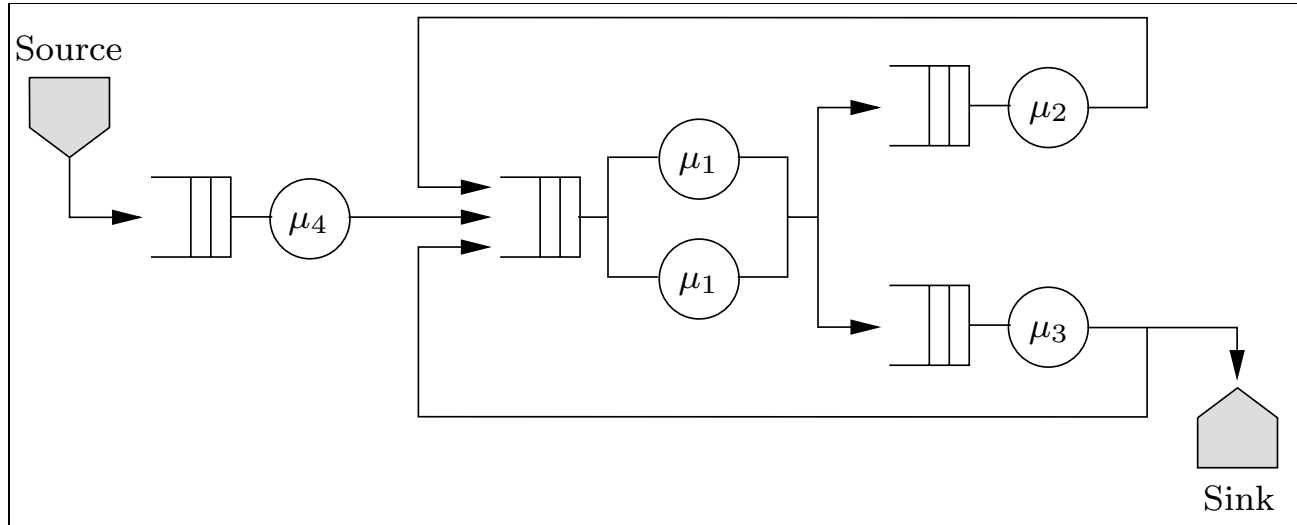
➤ Flow:  $i = 1, 2, \dots, N$

$$c_{Di}^2 = 1 + \frac{\rho_i^2 \cdot (c_{Bi}^2 - 1)}{\sqrt{m_i}} + (1 - \rho_i^2) \cdot (c_{Ai}^2 - 1)$$

➤ Splitting:  $i, j = 1, 2, \dots, N$

$$c_{ij}^2 = 1 + p_{ij} \cdot (c_{Di}^2 - 1)$$

## ◆ Beispiel:



$$p_{12} = 0.5, \quad p_{13} = 0.5, \quad p_{31} = 0.6, \quad p_{21} = p_{41} = 1$$

$$\mu_1 = 12.5, \quad \mu_2 = 33.333, \quad \mu_3 = 16.666, \quad \mu_4 = 20$$

$$c_{B_1}^2 = 2.0, \quad c_{B_2}^2 = 6.0, \quad c_{B_3}^2 = 0.5, \quad c_{B_4}^2 = 0.2, \quad c_{04}^2 = 4.0$$



- **Schritt 1:** Ankunftsraten und Auslastungen;

$$\lambda_1 = \underline{20}, \quad \lambda_2 = \underline{10}, \quad \lambda_3 = \underline{10}, \quad \lambda_4 = \underline{4}$$

$$\rho_1 = \underline{0.8}, \quad \rho_2 = \underline{0.3}, \quad \rho_3 = \underline{0.6}, \quad \rho_4 = \underline{0.2}$$

- **Schritt 2:** Variationskoeffizienten der Zwischenankunftszeiten:

➤ Initialisierung:

$$c_{12}^2 = c_{13}^2 = c_{21}^2 = c_{31}^2 = c_{41}^2 = 1$$

1. Iteration:

► Merging:

$$\begin{aligned} c_{A_1}^2 &= \frac{1}{\lambda_1} (c_{21}^2 \lambda_2 p_{21} + c_{31}^2 \lambda_3 p_{31} + c_{41} \lambda_4 p_{41}) \\ &= \frac{1}{20} (1 \cdot 10 \cdot 1 + 1 \cdot 10 \cdot 0.6 + 1 \cdot 4 \cdot 1) = \underline{1}. \end{aligned}$$

$$c_{A_2}^2 = \underline{1}, \quad c_{A_3}^2 = \underline{1}, \quad c_{A_4}^2 = \underline{4}$$

► Flow:

$$\begin{aligned}
 c_{D_1}^2 &= 1 + \frac{\rho_1^2(c_{B_1}^2 - 1)}{\sqrt{m_1}} + (1 - \rho_1^2)(c_{A_1}^2 - 1) \\
 &= 1 + \frac{0.64(2 - 1)}{\sqrt{2}} + (1 - 0.64)(1 - 1) \\
 &= \underline{1.453} \\
 c_{D_2}^2 &= \underline{1.45}, \quad c_{D_3}^2 = \underline{0.82}, \quad c_{D_4}^2 = \underline{3.848}.
 \end{aligned}$$

► Splitting:

$$c_{12}^2 = 1 + p_{12} \cdot (c_{D_1}^2 - 1) = \underline{1.226}$$

$$c_{13}^2 = \underline{1.226}, \quad c_{21}^2 = \underline{1.450}, \quad c_{31}^2 = \underline{0.892}, \quad c_{41}^2 = \underline{3.848}.$$

2. Iteration:

## ► Merging:

$$c_{A_1}^2 = \underline{1.762}, \quad c_{A_2}^2 = \underline{1.226}, \quad c_{A_3}^2 = \underline{1.226}, \quad c_{A_4}^2 = \underline{4.0}$$

## ► Flow:

$$c_{D_1}^2 = \underline{1.727}, \quad c_{D_2}^2 = \underline{1.656}, \quad c_{D_3}^2 = \underline{0.965}, \quad c_{D_4}^2 = \underline{3.848}$$

## ► Splitting:

$$c_{12}^2 = \underline{1.363}, \quad c_{13}^2 = \underline{1.363}, \quad c_{21}^2 = \underline{1.656}$$

$$c_{31}^2 = \underline{0.979}, \quad c_{41}^2 = \underline{3.848}$$

Insgesamt 7 Iterationen:

Iteration	$c_{A_1}^2$	$c_{A_2}^2$	$c_{A_3}^2$	$c_{A_4}^2$
1	1.0	1.0	1.0	4.0
2	1.762	1.226	1.226	4.0
3	1.891	1.363	1.363	4.0
4	1.969	1.387	1.387	4.0
5	1.983	1.401	1.401	4.0
6	1.991	1.403	1.403	4.0
7	1.992	1.405	1.405	4.0

- **Schritt 3:** Mittlere Anzahl der Aufträge

Iteration	$c_{A_1}^2$	$c_{A_2}^2$	$c_{A_3}^2$	$c_{A_4}^2$
Methods	$\bar{K}_1$	$\bar{K}_2$	$\bar{K}_3$	$\bar{K}_4$
AC	6.48	0.78	1.46	0.31
KLB	6.21	0.77	1.42	0.27
Sim	4.62	0.57	1.38	0.23

AC: Allen-Cunneen-Approximation

KLB: Krämer/Langenbach-Belz-Approximation

## 4 Prioritätsnetze

### ◆ Beschreibung:

- Mehrere Auftragsklassen mit Prioritäten  $1, 2, \dots, R$
- Vereinbarung:  $1$  : höchste Priorität;  $R$  : niedrigste Priorität
- WS-Netz kann ausser den 4 bekannten Produktformknotentypen noch die folgenden 2 Knotentypen besitzen:

M/M/1-FCFS-NONPRE      ohne Verdrängung

M/M/1-FCFS- PRE          mit Verdrängung

- Es gibt nur approximative Lösungen:
  - Erweiterte Mittelwertanalyse (PRIOMVA)
  - Shadow-Methode

## ■ PRIOMVA:

### ◆ MVA für mehrere Auftragsklassen:

#### ► Mittlere Antwortzeit (Ankunftstheorem);

$$\bar{T}_{ir}(\mathbf{k}) = \begin{cases} \frac{1}{\mu_{ir}} \left[ 1 + \sum_{s=1}^R \bar{K}_{is}(\mathbf{k} - \mathbf{1}_r) \right] & \text{Type-1,2,4} \\ & (m_i = 1), \\ \frac{1}{\mu_{ir}}, & \text{Type-3.} \end{cases}$$

$(\mathbf{k} - \mathbf{1}_r) = (k_1, \dots, k_r - 1, \dots, k_R)$  is the population vector with one class- $r$  job less in the system



- Mittlere Antwortzeit für M/M/1-PRE-Knoten:

$$\bar{T}_{ir}(k) = \frac{1}{\mu_{ir}} + \frac{\sum_{s=1}^r \frac{\bar{K}_{is}(k-1_r)}{\mu_{is}}}{1 - \sum_{s=1}^{r-1} \rho'_{is}},$$

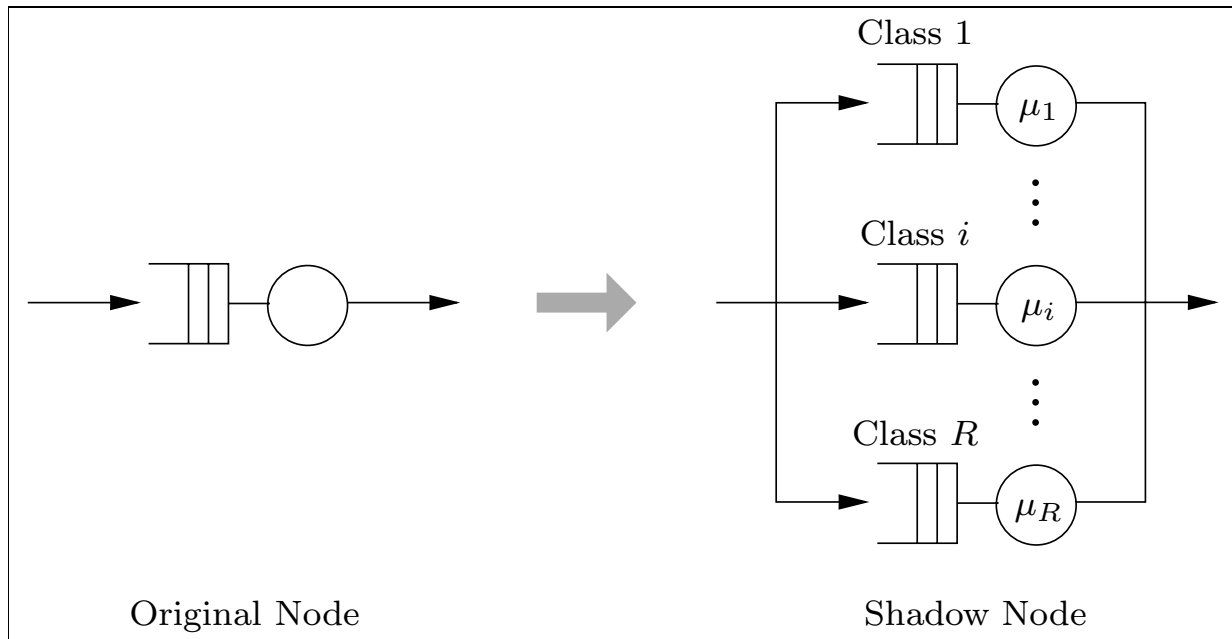
- Mittlere Antwortzeit für M/M/1-NONPRE-Knoten:

$$\bar{T}_{ir}(k) = \frac{1}{\mu_{ir}} + \frac{\sum_{s=1}^r \frac{\bar{K}_{is}(k-1_r)}{\mu_{is}} + \sum_{s=r+1}^R \frac{\rho_{is}(k-1_r)}{\mu_{is}}}{1 - \sum_{s=1}^{r-1} \rho'_{is}},$$

## ■ Shadow-Methode für M/M/1-FCFS-PRE-Knoten:

- Ein M/M/1-FCFS-PRE-Knoten wird ersetzt durch einen Shadow-Knoten mit  $R$  parallelen M/M/1-FCFS-Knoten.
- Dadurch entsteht ein Produktformwarteschlangennetz, das mit einem Standardverfahren gelöst werden kann.
- Da die Aufträge der verschiedenen Prioritätsklassen jetzt parallel bearbeitet werden, müssen die Bedienzeiten  $s_{ir} = 1/\mu_{ir}$  verlängert werden, damit die Antwortzeit des Shadowknotens mit dem des ursprünglichen M/M/1-FCFS-PRE-Knoten übereinstimmt. Dies geschieht iterativ mithilfe einer Approximationsformel. Der Startwert ist  $s_{ir}$ .

## ◆ Algorithmus:



- **Schritt 1:** Ersetze die Prioritätsknoten durch Shadow-Knoten
- **Schritt 2:** Setze  $\lambda_{i,r} = 0$
- **Schritt 3:** Iteration
  - **Schritt 3.1:** Berechne die Auslastungen der Shadow-Knoten:

$$\tilde{\rho}_{i,r} = \lambda_{i,r} \cdot \tilde{s}_{i,r}$$

- **Schritt 3.2:**

$$\tilde{s}_{i,r} = \frac{s_{i,r}}{1 - \sum_{s=1}^{r-1} \tilde{\rho}_{i,s}}$$

$s_{i,r}$ : Ursprüngliche Bedienzeit eines Auftrags der Klasse  $r$  beim Knoten  $i$

$\tilde{s}_{i,r}$  : Approximierte Bedienzeit eines Auftrags im Shadow-Knoten

- *Schritt 3.3*: Berechne den Durchsatz  $\lambda_{ir}$  eines Auftrags der Klasse  $r$  beim Knoten  $i$ .
  
- **Schritt 4**: Überprüfe die Abbruchbedingung. Ist sie erfüllt, berechne alle interessierenden Leistungsgrößen. Ansonsten gehe zurück zu *Schritt 3.1*.